185 002 J. 2509

CONCOURS SPECIAL T' 81

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

NOTATIONS.

Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension trois.

1. Dans ce problème, nous appellerons **mouvement dans** E, tout triplet (I, J, K) d'applications continûment dérivables à l'ordre deux de $\mathbb{R}$ dans E tel que, pour tout réel t, (I (t), J (t), K (t)) soit une base orthonormale directe de E.

Pour tout mouvement dans E, (I, J, K), nous noterons Ω l'application de $\mathbb{R}$ dans E telle que, pour tout réel t, $I'(t) = \Omega(t) \wedge I(t)$ $J'(t) = \Omega(t) \wedge J(t)$ $K'(t) = \Omega(t) \wedge K(t)$ et P, Q, R les applications de $\mathbb{R}$ dans E telles que, pour tout réel t,

$$\Omega(t) = P(t)\, I(t) + Q(t)\, J(t) + R(t)\, K(t)$$

(Les candidats n'ont pas à démontrer l'existence et l'unicité des applications Ω, P, Q, R, ni le fait qu'elles sont continûment dérivables à l'ordre un.)

2. Étant donnés quatre réels t_0, P_0, Q_0, R_0, et une base orthonormale directe (I_0, J_0, K_0) de E, nous dirons qu'un mouvement dans E, (I, J, K), **satisfait aux conditions initiales** (constituées par ces données), lorsqu'il vérifie les conditions :

$$P(t_0) = P_0 \qquad Q(t_0) = Q_0 \qquad R(t_0) = R_0$$
$$I(t_0) = I_0 \qquad J(t_0) = J_0 \qquad K(t_0) = K_0$$

3. Pour tout mouvement dans E, (I, J, K), nous noterons $\wedge$ l'application de $\mathbb{R}$ dans E telle que, pour tout réel t,

$$\wedge(t) = \alpha\, P(t)\, I(t) + \beta\, Q(t)\, J(t) + \gamma\, R(t)\, K(t)$$

où α, β, γ sont trois réels donnés vérifiant $0 < \alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$.

L'objectif est de résoudre, dans un certain nombre de cas particuliers qui seront précisés, le problème suivant :

PROBLÈME

Déterminer les mouvements (I, J, K) dans E satisfaisant aux conditions initiales données et à la condition (1) suivante :

(1) L'application $\wedge$ est constante.

(Dans ce cas, sa valeur constante sera également notée $.\wedge.$)

I.1. Démontrer que, pour un mouvement dans E, (I, J, K), les assertions suivantes sont équivalentes :

a. L'application Ω est constante.

b. Les applications P, Q, R sont constantes.

c. Il existe un vecteur unitaire e de E, un couple (λ, μ) de nombres réels et une base orthonormale directe (ξ, η, ζ) de E tels que, pour tout réel t, I (t), J (t) et K (t) soient les images respectives de ξ, η et ζ par la rotation vectorielle de E dont un couple d'éléments caractéristiques (vecteur unitaire choisi sur l'axe et angle associé) est $(e, \lambda t + \mu)$.

Tournez la page S. V. P.

I.2. Résoudre le problème posé dans le cas particulier où $\alpha = \beta = \gamma$ (lorsque $(P_0, Q_0, R_0) \neq 0$, on décrira la solution du problème sous la forme suivante : pour tout réel t, $I(t)$, $J(t)$ et $K(t)$ sont les images respectives de I_0, J_0 et K_0 par une rotation dont on donnera un couple d'éléments caractéristiques en fonction des conditions initiales et de t. (On ne demande pas les formules analytiques de la rotation.)

II.1. Démontrer que la condition (1) du problème (*i.e.* l'application $\wedge$ est constante) est équivalente à la condition (1') suivante :

$$(1') \qquad \forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} \alpha P'(t) + (\gamma - \beta) Q(t) R(t) = 0 \\ \beta Q'(t) + (\alpha - \gamma) R(t) P(t) = 0 \\ \gamma R'(t) + (\beta - \alpha) P(t) Q(t) = 0 \end{cases}$$

Dans toute la suite de cette partie II, *on envisage le cas particulier où* (α, β, γ) *vérifie* $\alpha = \beta$ et $\beta < \gamma$ *et où les conditions initiales satisfont à* $R_0 \neq 0$.

II.2. Supposant que le problème admette des solutions, on désigne par (I, J, K) l'une d'elles.

1° Démontrer que le triplet (P, Q, R) vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} P(t) = P_0 \cos \omega (t - t_0) - Q_0 \sin \omega (t - t_0) \\ Q(t) = P_0 \sin \omega (t - t_0) + Q_0 \cos \omega (t - t_0) \\ R(t) = R_0 \end{cases}$$

où $\omega = \dfrac{\gamma - \alpha}{\alpha} R_0$.

2° Soient U et V les applications de $\mathbb{R}$ dans E définies par

$$\forall t \in \mathbb{R} \begin{cases} U(t) = \cos \omega (t - t_0) \,.\, I(t) + \sin \omega (t - t_0) \,.\, J(t) \\ V(t) = -\sin \omega (t - t_0) \,.\, I(t) + \cos \omega (t - t_0) \,.\, J(t) \end{cases}$$

a. Démontrer que U et V sont continûment dérivables à l'ordre deux et que, pour tout réel t, $(U(t), V(t), K(t))$ est une base orthonormale directe de E.

b. Démontrer que, pour tout réel t,

$$\wedge_\wedge U(t) = \alpha U'(t) \qquad \wedge_\wedge V(t) = \alpha V'(t) \qquad \wedge_\wedge K(t) = \alpha K'(t)$$

c. Déduire du résultat précédent et des formules donnant (U, V, K) en fonction de (I, J, K) et de t, qu'à tout instant t, *i.e.* pour tout réel t, $I(t)$, $J(t)$ et $K(t)$ sont les images respectives de I_0, J_0 et K_0 par la composée $\rho_1(t) \circ \rho_2(t)$ de deux rotations vectorielles de E, $\rho_1(t)$ et $\rho_2(t)$, dont les sous-espaces invariants sont $\mathbb{R} K(t)$ pour $\rho_1(t)$ et $\mathbb{R} \wedge$ pour $\rho_2(t)$, et donner un couple d'éléments caractéristiques de chacune de ces rotations.

II.3. Achever la résolution du problème posé dans le cas particulier étudié, en vérifiant que l'unique triplet (I, J, K) défini au II.2.c. est bien solution de ce problème.

III.1. Démontrer que les conditions équivalentes (1) et (1') du problème impliquent que les deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$t \longmapsto \alpha P(t)^2 + \beta Q(t)^2 + \gamma R(t)^2$$

et

$$t \longmapsto \alpha^2 P(t)^2 + \beta^2 Q(t)^2 + \gamma^2 R(t)^2$$

sont constantes. (On désignera leurs valeurs respectives par k et l.)

Soient

$\mathcal{E}$ un espace affine euclidien orienté de dimension trois dont l'espace vectoriel associé est E, et A un point de $\mathcal{E}$,

$\mathcal{F}$ un second espace affine euclidien orienté de dimension trois, (O, u, v, w) un repère affine orthonormal direct de $\mathcal{F}$ et Σ la surface (ellipsoïde) d'équation cartésienne $\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = k$ dans ce repère,
et, pour tout réel t, Ψ_t l'isométrie de $\mathcal{E}$ sur $\mathcal{F}$ qui transforme le repère (O, u, v, w) en le repère $(A, I(t), J(t), K(t))$ et φ_t son application linéaire associée.

III.2. Soit M l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$ définie par

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \overrightarrow{AM}\,(t) = \Omega\,(t)$$

et N l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$N\,(t) = \Phi_t^{-1}\,(M\,(t))$$

1° Démontrer que l'image de N est incluse dans Σ.

2° Démontrer que l'image de M est incluse dans un plan Π de $\mathcal{E}$ orthogonal à Λ.

3° Démontrer, qu'à tout instant t, l'ellipsoïde $\Phi_t\,(\Sigma)$ est tangent à Π.

4° Démontrer que $\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \varphi_t\,(N'\,(t)) = M'\,(t)$.

III.3. L'image de N est incluse dans l'intersection de l'ellipsoïde Σ et d'un second ellipsoïde Σ' dont l'équation cartésienne dans le repère (O, u, v, w) est $\alpha^2 x^2 + \beta^2 y^2 + \gamma^2 z^2 = l$.

Dessiner les projections sur les trois plans de coordonnées de l'intersection de Σ avec Σ' dans les trois cas particuliers suivants :

Cas 1 : $(\alpha, \beta, \gamma, k, l) = (1, 3, 5, 1, 2)$.

Cas 2 : $(\alpha, \beta, \gamma, k, l) = (1, 3, 5, 1, 3)$.

Cas 3 : $(\alpha, \beta, \gamma, k, l) = (1, 3, 5, 1, 4)$.

(Pour dessiner ces projections, on prendra 10 cm pour unité de longueur.)

IV. Nous établissons dans cette partie quelques propriétés des triplets d'applications qui satisfont à la condition (1'). Pour cela :

Soit (f, g, h) un triplet d'applications continûment dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui satisfait à la condition (1'), *i.e.* tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} \alpha f'\,(t) + (\gamma - \beta)\, g\,(t)\, h\,(t) = 0 \\ \beta g'\,(t) + (\alpha - \gamma)\, h\,(t) f\,(t) = 0 \\ \gamma h'\,(t) + (\beta - \alpha) f\,(t)\, g\,(t) = 0 \end{cases}$$

1° Démontrer que f, g et h sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2° Démontrer que f, g et h sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

3° Démontrer que si C est un majorant commun à $|f|$, $|g|$ et $|h|$ sur $\mathbb{R}$ et D un majorant commun à $\dfrac{\gamma - \beta}{\alpha}$, $\dfrac{\gamma - \alpha}{\beta}$ et $\dfrac{\beta - \alpha}{\gamma}$,

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \qquad |\psi^{(n)}\,(t)| \leqslant n\,!\, C^n\, D^{n+1}$$

(où ψ désigne l'une quelconque des fonctions f, g ou h).

4° Démontrer que $\forall\, t, t_0 \in \mathbb{R}$ avec $|t - t_0|\, DC < 1$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \psi\,(t) - \sum_{p=0}^{n} \frac{(t - t_0)^p}{p\,!}\, \psi^{(p)}\,(t_0) \right| = 0$$

(où ψ désigne l'une quelconque des fonctions f, g ou h) et en déduire que f, g et h sont développables en série entière au voisinage de tout point de $\mathbb{R}$.

5° Démontrer que, étant donné un réel r strictement positif tel que $rDC < 1$, si f, g ou h est constante sur un intervalle ouvert de longueur $2r$, elle l'est aussi sur les translatés de cet intervalle par les translations $t \longmapsto t - \dfrac{1}{2} r$ et $t \longmapsto t + \dfrac{1}{2} r$. En déduire qu'elle est alors constante sur $\mathbb{R}$.

Tournez la page S. V. P.

6° Démontrer que, étant donné un réel t_0, pour que (f, g, h) soit constant, il faut et il suffit que

$$(f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)) = 0.$$

7° Dans le cas où $\alpha < \beta < \gamma$, étant donné un réel t_0, pour que (f, g, h) soit constant, il faut et il suffit que deux au moins des trois nombres $f(t_0)$, $g(t_0)$, $h(t_0)$ soient nuls.

V.1. Supposant $\alpha < \beta < \gamma$ résoudre le problème posé lorsque deux au moins des trois nombres P_0, Q_0 et R_0 sont nuls.

On suppose désormais que $\alpha < \beta < \gamma$ et que les conditions initiales sont telles que $l = \beta k$ et que le triplet (P_0, Q_0, R_0) contient au plus un élément nul.

V.2. Supposant que le problème admette des solutions, soit (I, J, K) l'une d'elles.

1° Exprimer P^2 et R^2 en fonction de Q^2 (et de α, β, γ, k). Démontrer que P^2, R^2 et $k - \beta Q^2$ n'ont pas de racine sur $\mathbb{R}$.

2° Démontrer qu'il existe une application θ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, et une seule, telle que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \theta(t) \in [0, \Pi] \qquad \text{et} \qquad Q(t) = \sqrt{\frac{k}{\beta}} \cos\theta(t).$$

Démontrer que l'application θ ne prend pas les valeurs 0 et Π et qu'elle est continûment dérivable sur $\mathbb{R}$.

3° On pose désormais $b = \sqrt{\frac{k}{\beta}}$. Démontrer qu'il existe un couple (a, c) de nombres réels, et un seul, tel que : $\forall\, t \in \mathbb{R}$ $P(t) = a \sin(t)$ et $R(t) = c \sin(t)$.

Vérifier que le triplet (a, b, c) satisfait aux conditions :

$$\begin{cases} \alpha a^2 + \beta c^2 - \gamma b^2 = 0 \\ \alpha^2 a^2 + \beta^2 c^2 - \gamma^2 b^2 = 0 \end{cases}$$

4° En utilisant la deuxième relation de la condition (1') démontrer qu'il existe un réel strictement positif H tel que

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \qquad \operatorname{tg}\left(\frac{\theta(t)}{2}\right) = H\, e^{-\omega_1 t} \qquad \text{où} \qquad \omega_1 = \frac{\gamma - \alpha}{\beta}\frac{ac}{b}$$

5° Soient les applications U_1, W_1, S et T de $\mathbb{R}$ dans E définies par

$$\forall\, t \in \mathbb{R} \begin{cases} U_1(t) = \dfrac{a\alpha I(t) + c\gamma K(t)}{\sqrt{a^2\alpha^2 + c^2\gamma^2}} & W_1(t) = \dfrac{-c\gamma I(t) + a\alpha K(t)}{\sqrt{a^2\alpha^2 + c^2\gamma^2}} \\ S(t) = \dfrac{\Lambda}{\|\Lambda\|} & T(t) = W_1(t) \wedge S(t) \end{cases}$$

Démontrer que ces applications sont continûment dérivables à l'ordre deux et que, pour tout réel t, $(U_1(t), J(t), W_1(t))$ et $(S(t), T(t), W_1(t))$ sont des bases orthonormales directes de E.

6° Pour tout réel t, comparer $\Lambda \wedge W_1(t)$ et $W_1'(t)$.

7° Démontrer que, pour tout réel t, la base $(I(t), J(t), K(t))$ est l'image de la base $(U_1(t), J(t), W_1(t))$ par une rotation vectorielle de E dont on donnera un couple d'éléments caractéristiques,
la base $(U_1(t), J(t), W_1(t))$ est l'image de la base $(S(t_0), T(t_0), W_1(t_0))$ par une rotation vectorielle de E dont on donnera un couple d'éléments caractéristiques.

V.3. Achever la résolution du problème posé dans le cas particulier étudié, en vérifiant que le triplet (I, J, K) d'applications de $\mathbb{R}$ dans E défini au V.2.(7) est bien solution de ce problème.

V.4. Déterminer

$$\lim_{t \to +\infty} \theta(t).$$

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail